Loogika

PK.1457

Tõnu Tamme

Tonu.Tamme [at] ut.ee
Tonu.Tamme [at] emu.ee

Aine struktuur

- esimene kontrolltöö (100 p.)
- teine kontrolltöö (100 p.)
- järeltööd (jaanuaris)

Aine sisu

- põhimõisted
- lauseloogika
- predikaatloogika

I osa. Loogika põhimõisted

- Mis on loogika?
- Loogikaseadused
- Tõesus
- Arutlus
- Ülesanded

1. Mis on loogika?

- Loogika definitsioonid
- Loogika kasutused
- Erinevad loogikad
- Loogikaseadused

Mis on loogika?

- Loogika on teadus mõtlemise üldistest seadustest ja vormidest.
- Loogika on järelduste tegemine.
- Loogika on õpetus olemasoleva info põhjal võimalikult heade vastuste saamisest.
- Evert Beth: loogika on tõestused, definitsioonid ja arvutamine.

Kust õppida?

- Tõnu Tamme, Tanel Tammet, Rein Prank.
  Loogika: mõtlemisest tõestamiseni.
  Tartu, 1997, 2002.
- Reimo Palm, Rein Prank.
  Sissejuhatus matemaatilisse loogikasse.
  Tartu, 2004.
- Indrek Meos. Loogika. Argumentatsioon. Mõtlemiskultuur.
  Tallinn, 1996, 2003.
- Jens Allwood, Lars-Gunnar Andersson, Östen Dahl.
  Logic in linguistics.
  Cambridge UP, 1991.

Mida veel lugeda?

- Galina Vuks. Traditsiooniline formaalne loogika.
Tartu, 1999.
- Enn Kasak. Loogika.
- Ene Grauberg. Loogika, keel ja mõtlemine.
Tallinn, 1996.
- Ivar Kull. Matemaatiline loogika.
Tallinn, 1964.
- ...

Kus loogikat kasutatakse?

- …

Minu erakordne loogiline juhtum

- Situatsiooni kirjeldus
- Mis juhtus? (tulem)
- Reegel

Millised loogikad on olemas?

- formaalne loogika
- mitteformaalne loogika
- matemaatiline loogika
- klassikaline loogika
- mitteklassikaline loogika
- ...

Aristotelese loogikaseadused

- samasusseadus
- mittevasturääkivusseadus
- välistatud kolmanda seadus

Samasusseadus

Mitte ühegi lause ega mõiste sisu ei muutu arutluse käigus.

Näide.

Lamp on päike.
Päike on päike.
Kuu on päike.

Mittevasturääkivusseadus

Ükski lause ei tohi olla vastuolus iseendaga ega arutluse mõne teise lausega.

Näide.

Päike on päike. Päike pole päike.
Järelikult mina olen Tartu Ülikooli rektor.

Välistatud kolmanda seadus

Iga lause on kas tõene või väär,
kolmandat võimalust ei ole.

Järeldus.

On täpselt kaks tõeväärtust — tõene ja väär.
Ülejäänud laused jäävad vaatluse alt välja.

Käsitleme ainult väitlauseid.

Näide.

Mart arvab, et Tartu on ilus linn.
Pille arvab, et Tartu pole ilus linn.
Uks on kinni?
Uks on kinni!
Nägemist.

2. Tõesus

- Tõetingimused
- Erinevad tõed
- Mõisted
- Hulgad

Tõetingimused

Alfred Tarski:

Lause p on tõene parajasti siis, kui p.

Lause tõesuse või vääruse määrab tegelik maailm.

Näide.

“Lumi on valge” on tõene parajasti siis, kui lumi on valge.

Väide.

Tõeseid lauseid on täpselt sama palju kui vääraid.

Loogiline tõesus

Definitsioon.

Lause on loogiliselt tõene, kui ta on tõene oma (loogilise) vormi tõttu.

Lause on loogiliselt väär, kui ta on väär oma (loogilise) vormi tõttu.

Näide.

Päike on päike.

Loogika on loogika. (*a* on *a*)

Päike on taevakeha või Päike pole taevakeha.
(*a* on *b* või *a* pole *b*)

Märkus.

Sõna kuulub loogika sõnavarasse, kui seda kasutatakse kõigis teadusvaldkondades.

Analüütiline tõesus

Definitsioon.

Lause on analüütiliselt tõene, kui ta on tõene sõnade tähenduse tõttu.

Lause on analüütiliselt väär, kui ta on väär sõnade tähenduse tõttu.

Näide.

Päike on taevakeha.

$2 + 2 = 4$.

$2 \neq 3$.

Väide.

Iga loogiliselt tõene lause on analüütiliselt tõene.

Iga loogiliselt väär lause on analüütiliselt väär.

Sünteetiline tõesus

Definitsioon.

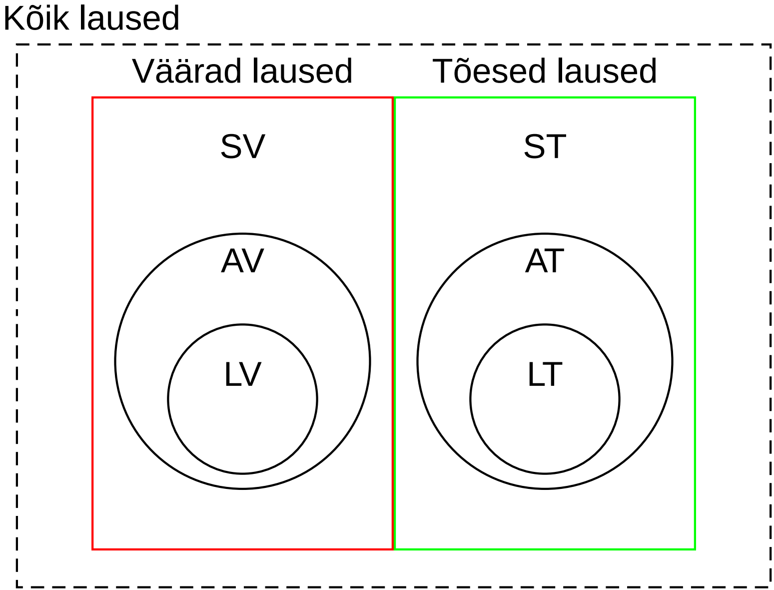
Lause on sünteetiliselt tõene, kui ta on tõene, kuid pole analüütiliselt tõene.
Lause on sünteetiliselt väär, kui ta on väär, kuid pole analüütiliselt väär.

Sünteetilised laused annavad maailma kohta informatsiooni.

Näide.

Tõnu on inimene.
Tõnu on alla 2 meetri pikk.

Skeem



Paradoksid

See lause on väär.

a) lause on tõene — vastuolu
b) lause on väär — vastuolu

Järeldus.
Paradoksid pole deklaratiivsed laused.

Veel tõesusest

Definitsioon.

Lause on analüütiliselt tõene, kui ta on tõene igas (subjektiivselt) võimalikus maailmas.
Lause on loogiliselt tõene, kui ta ei saa (mingil tingimusel) olla väär.

Alfred Tarski: Lause on loogiliselt tõene parajasti siis, kui ta on tõene igal (loogiliselt võimalikul) juhtumil.

Märkus.

Matemaatiliselt tõesed laused ei tarvitse olla loogiliselt tõesed.

Näide.

$2+2=4$.

Märkus.

Analüütiliselt tõene on see, mida oskab tõestada arvuti.

Mõisteõpetus

- Mõiste — sarnaste objektide kogum.
- Mõisteõpetus — teooria, mis käsitleb mõisteid ja nende vahelisi seoseid.
- Termin — mõiste nimi
- Mõiste sisu — mõiste selgitus teiste mõistete kaudu.
  N. Hunt on koerlaste sugukonna suurim loomaliik.
- Mõiste maht — mõiste alla kuuluvate objektide hulk.
  N. Kõik maailmas elavad hundid.
- Mõiste sisu ja mahu vaheline seos . . .

Mõisted ja hulgad

$$\text{taevakeha} = \{\text{Maa}, \text{Kuu}, \text{Päike}\}$$

Maa, Kuu ja Päike on (täpselt) taevakehad.

Sõna “on” kolm tähendust		
alamhulk	$\{\text{Maa}, \text{Kuu}\} \subseteq \text{taevakeha}$	Maa ja Kuu on taevakehad.
element	$\text{Maa} \in \text{taevakeha}$	Maa on taevakeha.
võrdus	$\text{Maa} = \{\text{Maa}\}$	Maa on Maa.

Järeldus.

$$\text{Maa} = \{\text{Maa}\} = \{\{\text{Maa}\}\} = \{\{\{\text{Maa}\}\}\} = \ldots$$

Vasturääkivus

Definitsioon.

Lausete hulk on vasturääkiv, kui selle hulga laused ei saa olla korraga tõesed. Vastasel juhul nimetatakse lausete hulka kooskõlaliseks.

Näide.

{“Päike on taevakeha.”, “Päike pole taevakeha.”}

{*a* on *b*	, *a* pole *b*}
tõene	väär
väär	tõene

3. Arutlus

- Mis on arutlus?
- Kehtivus
- Deduktsioon ja induktsioon
- Loogika põhiteorem
- Ekvivalentsus
- Milli meetodid

Arutlus

Arutlus on minimaalne mõttekäigu osa.

Definitsioon.

Arutlus on lausete hulk, milles üks lause on välja eraldatud kui järeldus ja ülejäänud laused on selle lause eeldusteks.

Mõttekäik on arutluste kogum.

Näide.

Täna on reede. Järelikult homme on laupäev. (a_1)

Näide.

Täna on reede. Homme on laupäev. Ülehomme on pühapäev. (m)

$$a_1 = \{r, l^*\}, \quad a_2 = \{l, p^*\}$$
$$m = \{a_1, a_2\} = \{\{r, l^*\}, \{l, p^*\}\}$$
$$m = \{r, l, p\} = \{r, l, l, p\}$$

Kehtivus

Definitsioon.

Arutlus kehtib, kui sellele vastav arutlusvorm kehtib.

Arutlusvorm kehtib, kui ei ole võimalik, et selle eeldused on tõesed ja järeldus on väär.

Tähistus: $\{p_1, \ldots, p_n\} \models q$

(s.t. eeldustest $p_1, \ldots, p_n$ järeldub q).

Näide.

Täna on reede. Järelikult homme on laupäev.

$$r \not\models l$$

Ei kehti!

a on $b \not\models c$ on d

Kehtivuse tagamine

Väide.

Iga mittekehtiva arutluse saab muuta kehtivaks, lisades sellele sobivalt eelduseid.

Näide.

Täna on reede.
Gregoriuse kalendris järgneb reedele laupäev.
Kehtib Gregoriuse kalender.

Homme on laupäev.

(arutluse standardkuju)

Näiteid

Näide.

Tõnu on inimene.

Tõnu on õnnelik.

a on *b*

---

a on *c*

Võimalikud lisaeeldused:

- Inimene on õnnelik.
- Kõik inimesed on õnnelikud.
- Kui Tõnu on inimene, siis Tõnu on õnnelik.

Korrektsus

Definitsioon.
Arutlus on korrektne, kui see kehtib ja selle eeldused on tõesed.

Näide.
...

Deduktsioon ja induktsioon

Definitsioon.

Arutlust nimetatakse deduktiivseks, kui see kehtib.
Arutlust nimetatakse induktiivseks, kui see ei kehti.

Märkus.

Deduktiivset arutlust ei saa muuta eelduste lisamisega induktiivseks, sest eelduste lisamisel arutluse kehtivus säilib.
Monotoonsus:

$$\Gamma \models p \quad \Longrightarrow \quad \Gamma, q \models p.$$

Tõestus.

... $\square$

Kehtivus ja vasturääkivus

Väide.

Vasturääkivate eeldustega arutlus kehtib (suvalise järelduse korral).

Näide.

$p, \neg p \models m$

Päike on taevakeha. Päike pole taevakeha. Järelikult mina olen Tartu Ülikooli rektor.

Tõestus.

$p, \neg p$ (eitus) ja m võimalike tõeväärtuste kolmikud on:

- t, v, t
- t, v, v
- v, t, t
- v, t, v

Järelikult väärtustus t, t, v pole võimalik. $\square$

Põhiteoreem

$$\Gamma \models p \iff (\Gamma \cup \{\neg p\} \text{ on vasturääkiv}).$$

Järeldus.

$r, \neg r \models q \iff \{r, \neg r, \neg q\}$ on vasturääkiv.
$r, \neg q \models r \iff \{r, \neg r, \neg q\}$ on vasturääkiv.

Näide.

Söön torti. Kui söön torti, siis lähen paksuks.
Järelikult lähen paksuks. — kehtiv arutlus.

{“Söön torti.”,
“Kui söön torti, siis lähen paksuks.”,
“Ei lähe paksuks.”}

on vasturääkiv lausete hulk.

Ekvivalentsus

Definitsioon.

Me ütleme, et laused p ja q on loogiliselt ekvivalentsed e. samaväärsed, kui ei ole (mingil juhul) võimalik, et üks lause on tõene ja teine lause on väär. Tähistus: $p = q$.

Näide.

1) Maa on taevakeha ja Kuu on taevakeha.
2) Kuu on taevakeha ja Maa on taevakeha.

Teoreem.

$p = q \iff (p \models q$ ja $q \models p)$,
s.t. ekvivalentsed laused järelduvad teineteisest.

Näide.

$p = \neg\neg p$

Milli induktiivsed meetodid

Juht	Asjaolud	Nähtus
1.	A, B, C	a
2.	A, D, E	a
3.	F, A, L	a
4.	T, M, A	a

Tõenäoliselt A on a põhjus.

Juht	Asjaolud	Nähtus
1.	A, B, C, D	a
2.	B, C, D	—

Ühildumis- ja erinevusmeetod

Kui 1) mingi asjaolu esineb igal nähtuse avaldumisel
2) ja see ei esine ühelgi juhul, kus nähtus ei avaldu,
3) ja see asjaolu on üheselt määratud,
siis see asjaolu on nähtuse tõenäoline põhjus.

Näide.

Juht	Asjaolud	Nähtus
1.	F, T, P	V
2.	T, P	V
3.	H, F, T, P	V
4.	H, F	—
5.	P, H	—

Vanasõnad: Kured läinud, kurjad ilmad.

II osa. Lauseloogika

- Lauseloogika tehted
- Süntaks ja semantika
- Tõeväärtustabel
- Kiirkontroll

4. Lauseloogika tehted

- Konjunktsioon
- Disjunktsioon
- Eitus
- Implikatsioon
- Ekvivalents
- Eesti keel

Lauseloogika tehted

Näide.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Jüri õpib täna või ta kukub homme eksamil läbi.}\\ \text{Jüri ei õpi täna.}\end{array}}{\text{Jüri kukub homme eksamil läbi.}}$$

Lihtlaused:

A: Jüri õpib täna.

B: Jüri kukub homme eksamil läbi.

$$\frac{\begin{array}{l}A \text{ või } B\\ \text{mitte } A\end{array}}{B}$$

Lauseloogika tehted

Definitsioon.
Lausete vaheline seos on lauseloogika tehe, kui selle tõeväärtus on osalausete tõeväärtustega üheselt määratud.

Disjunktsioon

A: Jüri vaatab telekat.

B: Jüri sööb võileiba.

$$
\begin{array}{ccccc}
A & & B & & \\
t & \text{või} & t & = & t \\
t & \text{või} & v & = & t \\
v & \text{või} & t & = & t \\
v & \text{või} & v & = & v
\end{array}
$$

Teoreem.

Eesti keele seos “või” on lauseloogika tehe.

Nimetus: disjunktsioon $\vee$ (allapoole nurk)

Ümbersõnastus: emb-kumb A või B või mõlemad.

Välistav “või”: kas A või B, kuid mitte mõlemad.

Konjunktsioon

A: Jüri vaatab telekat.
B: Jüri sööb võileiba.

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & \\ t & \text{ja} & t & = & t \\ t & \text{ja} & v & = & v \\ v & \text{ja} & t & = & v \\ v & \text{ja} & v & = & v \end{array}$$

Nimetus: konjunktsioon & (ampersand)
Ümbersõnastus: nii *A* kui ka *B*.

Ekvivalents

A: Jüri vaatab telekat.
B: Jüri sööb võileiba.

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & \\ t & \text{iff} & t & = & t \\ t & \text{iff} & v & = & v \\ v & \text{iff} & t & = & v \\ v & \text{iff} & v & = & t \end{array}$$

Nimetus: ekvivalents $\equiv$ (kolmene võrdus)
Ümbersõnastus: A parajasti siis, kui B.

Eitus

A: Jüri vaatab telekat.
B: Jüri sööb võileiba.

$$\begin{array}{lcccc} & A & & \\ \text{mitte} & t & = & v \\ \text{mitte} & v & = & t \end{array}$$

Nimetus: eitus $\neg$ (pikali L, ülemine parempoolne nurk)
Ümbersõnastus: pole nii, et A.

Implikatsioon

A: Jüri vaatab telekat.

B: Jüri sööb võileiba.

	A		B		
kui	t	siis	t	$=$	t
kui	t	siis	v	$=$	v
kui	v	siis	t	$=$	t
kui	v	siis	v	$=$	t

Näide.

Kui täna on teisipäev, siis homme on kolmapäev.

Nimetus: implikatsioon $\supset$ (hobuseraud)

Ümbersõnastus: ei ole A või on B.

Aga

A: Jüri vaatab telekat.
B: Jüri sööb võileiba.

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & \\ t & \text{aga} & t & = & t \\ t & \text{aga} & v & = & v \\ v & \text{aga} & t & = & v \\ v & \text{aga} & v & = & v \end{array}$$

Järeldus.

See on konjunktsioon!

Lauseloogika ja eesti keel

Teoreem.

Eesti keeles on lausete vahelisi seoseid rohkem kui lauseloogikas.

Tõestus.

Kahekohalisi lauseloogika tehteid on $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Eesti keeles on lausete vahelisi seoseid rohkem kui 16:

ja, või, . . . $\square$

Lauseloogikas mitteväljendatavad seosed

Teoreem.

Seos “sest” pole lauseloogikas väljendatav.

Tõestus.

Jüri ei kukkunud eksamil täna läbi, sest ta õppis eile hoolega.
Jüri ei kukkunud eksamil täna läbi, sest $2+2=4$. $\square$

$$
\begin{array}{ccccc}
A & & B & & \\
t & \text{sest} & t & = & t, v \\
t & \text{sest} & v & = & \\
v & \text{sest} & t & = & \\
v & \text{sest} & v & = &
\end{array}
$$

Kontrafaktuaalne tingimuslause

- kontrafaktuaalne tingimuslause pole lauseloogika tehe:
  kui ma oleksin nähtamatu, näeksid mind kõik
  $(v \supset v = v)$
  kui ma oleksin nähtamatu, ei näeks mind keegi
  $(v \supset v = t)$

5. Lauseloogika süntaks

- Tähestik
- Lauseloogika valem
- Valemi tõestus
- Sulud

Tähestik

Kas valem on õigesti kirjutatud?

Lausearvutuse tähestik

- lausemuutujad:
  $A, B, C, \ldots, Z, a, b, c, \ldots, z, A_1, A_2, \ldots$
- loogiliste tehete sümbolid: $\neg\ \&\ \vee\ \supset\ \equiv$
- sulud: $(\,), [\,], \{\,\}$

Lauseloogika valem

Definitsioon.

(Lauseloogika valem, LLV)

1. Iga lausemuutuja on LLV (atomaarne valem).
2. Kui p on LLV, siis $\neg p$ on LLV.
3. Kui p ja q on LLVd, siis $(p \,\&\, q)$, $(p \vee q)$, $(p \supset q)$ ja $(p \equiv q)$ on LLVd.

$3^{[]}$. Kui p ja q on LLVd, siis $[p \,\&\, q]$, $[p \vee q]$, $[p \supset q]$ ja $[p \equiv q]$ on LLVd.

$3^{\{\}}$. Kui p ja q on LLVd, siis $\{p \,\&\, q\}$, $\{p \vee q\}$, $\{p \supset q\}$ ja $\{p \equiv q\}$ on LLVd.

4. Kui p on LLV, siis (p), $[p]$ ja $\{p\}$ on LLVd.
5. Muid LLVsid pole.

Valemi tõestus

Teoreem.

$\{(A \mathbin{\&} B) \vee [\neg C]\}$ on LLV.

Tõestus.

1. A on LLV (def1)
2. B on LLV (def1)
3. C on LLV (def1)
4. $(A \mathbin{\&} B)$ on LLV (1,2,def3)
5. $\neg C$ on LLV (3,def2)
6. $[\neg C]$ on LLV (5,def4)
7. $\{(A \mathbin{\&} B) \vee [\neg C]\}$ on LLV (4,6,def3$^{\{\}}$)

$\square$

Negatiivne tõestus

Teoreem.
$(A \text{ sest } B)$ ei ole LLV.

Tõestus.

... $\square$

Sulgude ärajätmine

Valemisse $A \vee B \;\&\; C \vee D$ saab sulgusid panna mitmel moel:

1. $(A \vee B) \;\&\; (C \vee D)$
2. $((A \vee B) \;\&\; C) \vee D$
3. $\ldots$

Reeglid

1. Valemi välimised sulud võib ära jätta.
2. Tehete prioriteedid: $\neg \;\&\; \vee \supset \equiv$
3. Tehte assotsiatiivsus: $A \;\&\; B \;\&\; C = (A \;\&\; B) \;\&\; C$
4. Sulud võib ära jätta, kui võimalikud sulgude paigutused on ekvivalentsed.

6. Lauseloogika semantika

- Lausemuutujate väärtustus
- Tehete tõetingimused
- Samaväärsused

Väärtustus

Kas valem on tõene või väär? $(A \,\&\, B) \vee \neg C$
Millised on valemi tõetingimused?

- Lausemuutujate tõeväärtused määratakse valemi muutujate väärtustusega.
  Näiteks: $A = t$, $B = t$, $C = v$.

- $\neg p$ on tõene $\iff$ p on väär. (tõetingimus)

A	$\neg A$
t	v
v	t

- $\neg p$ on väär $\iff$ p on tõene. (väärustingimus)

Konjunktsioon

A	B	$A \mathbin{\&} B$
t	t	t
t	v	v
v	t	v
v	v	v

- $p \mathbin{\&} q$ on tõene $\iff p$ on tõene ja q on tõene.

Disjunktsioon

A	B	$A \vee B$
t	t	t
t	v	t
v	t	t
v	v	v

- $p \vee q$ on tõene $\iff \ldots$
- $p \vee q$ on väär $\iff$ p on väär ja q on väär.
- $p \vee q$ on tõene $\iff$ p on tõene või q on tõene.

Implikatsioon

A	B	$A \supset B$
t	t	t
t	v	v
v	t	t
v	v	t

- $p \supset q$ on väär $\iff$ p on tõene ja q on väär.
- $p \supset q$ on tõene $\iff$ p on väär või q on tõene.

Ekvivalents

A	B	$A \equiv B$
t	t	t
t	v	v
v	t	v
v	v	t

- $p \equiv q$ on tõene $\iff$ p ja q on mõlemad kas tõesed või väärad.
- $p \equiv q$ on väär $\iff$ p ja q tõeväärtused on erinevad.

Lauseloogika semantika (kokkuvõte)

1. Lausemuutujate tõeväärtused on määratud valemi muutujate väärtustusega.
2. $\neg p$ on tõene $\iff$ p on väär.
3. $p \mathbin{\&} q$ on tõene $\iff$ p on tõene ja q on tõene.
4. $p \vee q$ on tõene $\iff$ p on tõene või q on tõene.
5. $p \supset q$ on tõene $\iff$ p on väär või q on tõene.
6. $p \equiv q$ on tõene $\iff$ p ja q on mõlemad kas tõesed või väärad.

2^V. $\neg p$ on väär $\iff$ p on tõene.

3^V. $p \mathbin{\&} q$ on väär $\iff$ p on väär või q on väär.

4^V. $p \vee q$ on väär $\iff$ p on väär ja q on väär.

5^V. $p \supset q$ on väär $\iff$ p on tõene ja q on väär.

6^V. $p \equiv q$ on väär $\iff$ p ja q tõeväärtused on erinevad.

Semantilised samaväärsused

Teoreem.

$\neg\neg p = p$.

Tõestus.

$$\begin{aligned} &\neg\neg p = t \\ \iff &\neg p = v \\ \iff &p = t \end{aligned}$$

$\square$

Semantilised samaväärsused 2

Teoreem.
$\neg(p \mathbin{\&} q) = \neg p \vee \neg q.$ (De Morgani seadus)

Tõestus.

$$\begin{aligned}
&\neg(p \mathbin{\&} q) = t \\
&\iff p \mathbin{\&} q = v \\
&\iff p = v \ \text{ või } \ q = v \\
&\iff \neg p = t \ \text{ või } \ \neg q = t \\
&\iff \neg p \vee \neg q = t
\end{aligned}$$

$\square$

Semantilised samaväärsused 3

Teoreem.
$p \supset q = \neg(p \mathbin{\&} \neg q)$.

Tõestus.

$$
\begin{aligned}
& p \supset q = v \\
\iff & p = t \;\; ja \;\; q = v \\
\iff & p = t \;\; ja \;\; \neg q = t \\
\iff & p \mathbin{\&} \neg q = t \\
\iff & \neg(p \mathbin{\&} \neg q) = v
\end{aligned}
$$

$\square$

Semantilised samaväärsused 4

Järeldus.
$p \supset q = \neg p \vee q$.

Tõestus.

$$
\begin{aligned}
&p \supset q = \\
&= \neg(p \,\&\, \neg q) = \\
&= \neg p \vee \neg\neg q = \\
&= \neg p \vee q
\end{aligned}
$$

$\square$

7. Tõeväärtustabel

- Arutluse tõestamine
- Tabeli täitmine
- Valemite klassifikatsioon
- Seadused
- Kiirkontroll

Arutluse formaliseerimine

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Jüri loeb ajalehte või Jüri vaatab televiisorit.}\\ \text{Jüri ei loe ajalehte.}\end{array}}{\text{Jüri vaatab televiisorit.}}$$

Selle arutluskäigu saab lausearvutuses kirja panna kujul

$$\frac{\begin{array}{c}A \vee T\\ \neg A\end{array}}{T}$$

Arutluse kehtivuse kontrollimine

Paigutame arutluse valemite tabelid kõrvuti ja arvutame need välja.

A	T	$A \vee T$	$\neg A$	T	
t	t	t	v	t	
t	v	t	v	v	
v	t	t	t	t	$\leftarrow$ arutlus kehtib
v	v	v	t	v	

Definitsioon.

Lauseloogika arutlus kehtib, kui igal lausemuutujate väärtustusel, millel selle eeldused on tõesed, on tõene ka järeldus.

Tõeväärtustabeli reeglid

1. Moodusta kaheveeruline tabel ja kirjuta valem päise parempoolsesse lahtrisse.
2. Kanna päise vasakpoolsesse lahtrisse valemi lausemuutujad tähestiku järjekorras.
3. Kirjuta vasakpoolsesse veergu lausemuutujate alla tähestiku järjekorras lausemuutujate kõik väärtustused.
4. Kanna valemi tehete kohale nende sooritamise järjekord, nii et tehte väärtuse arvutamisel oleksid selle alamvalemite väärtused juba leitud.
5. Kirjuta tabeli parempoolse veeru igas reas valemi tehete alla nende tõeväärtused vastavatel lausemuutujate väärtustel, arvestades tehete sooritamise järjekorda.

Näide

			4	3	2	1
A	B	C	$A\,\&$	$\neg(B$	$\supset(A$	$\vee\, C))$
t	t	t	v	v	t	t
t	t	v	v	v	t	t
t	v	t	v	v	t	t
t	v	v	v	v	t	t
v	t	t	v	v	t	t
v	t	v	v	t	v	v
v	v	t	v	v	t	t
v	v	v	v	v	t	v

Väide.

Kui valemis on n lausemuutujat, siis on tõeväärtustabelis 2^n rida.

Valemite klassifikatsioon

Definitsioon.

Valem on tautoloogia, kui see on kõigil lausemuutujate väärtustustel tõene.
Valem on kontradiktsioon, kui see on kõigil lausemuutujate väärtustustel väär.
Valem on kontingentne, kui see on mõnel lausemuutujate väärtustusel tõene ja mõnel lausemuutujate väärtustusel väär.

Näide.

$$A \mathbin{\&} \neg(B \supset (A \vee C))$$

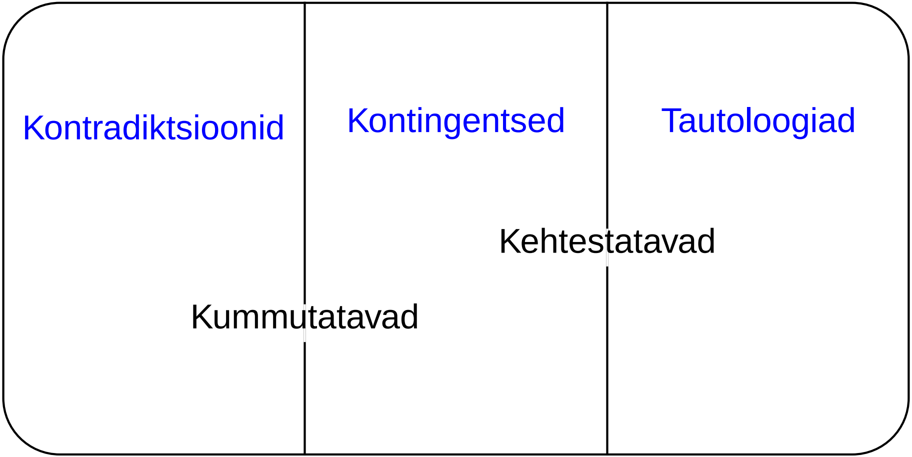
$$\neg(A \mathbin{\&} \neg(B \supset (A \vee C)))$$

$$A \vee \neg A$$

$$A \mathbin{\&} \neg B$$

$$A \mathbin{\&} \neg A$$

Skeem


Kontradiktsioonid
Kontingentsed
Tautoloogiad
Kehtestatavad
Kummutatavad

Järeldumine ja samaväärsus

Teoreem.
$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \models q \iff$
$\iff$ valem $(p_1 \mathbin{\&} p_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} p_n) \supset q$ on tautoloogia.

Teoreem.
Laused p ja q on loogiliselt ekvivalentsed $\iff$
$\iff$ valem $p \equiv q$ on tautoloogia.

Märkus.
Valemid p ja q on loogiliselt ekvivalentsed $\iff$
$\iff$ nende peatehete veerud langevad kokku.

Seadused

- $\neg\neg p = p$ (kahekordse eituse)
- $\neg(p \,\&\, q) = \neg p \vee \neg q$ (De Morgani)
- $\neg(p \vee q) = \neg p \,\&\, \neg q$
- $p \supset q = \neg(p \,\&\, \neg q)$ (implikatsiooni)
- $p \supset q = \neg p \vee q$
- $p \supset q = \neg q \supset \neg p$ (ümberpööramise)
- $p \supset q, p \models q$ (Modus Ponens)
- $p \supset q, \neg q \models \neg p$ (Modus Tollens)
- $p \,\&\, q \models p$ (lihtsustamine)
- $\ldots$

Kiirkontroll

Näide.

$((A \vee T) \,\&\, \neg A) \supset T$ on tautoloogia.

Reeglid

1. Oletame vastuväiteliselt, et peatehte väärtus on väär.
2. Määrame peatehte alamvalemite tõeväärtused.
3. Kordame punkti 2, kuni jõuame lausemuutujateni.
4. Otsime lausemuutujat, mis on samaaegselt tõene ja väär (*).
5. Siis ei saa valem olla väär, mistõttu see on tautoloogia.
6. Kui alamvalemite tõeväärtused pole üheselt määratud, toimub jagunemine (vastuolulisteks) harudeks.

Näide

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & 1 & & & 3 & 2 & & & 4 & \\
(& (& A & \vee & T &) & \& & \neg & A &) & \supset & T \\
 & & & & & & & & & & v & \\
 & & & & & & t & & & & & v^* \\
 & & & t & & & & t & & & & \\
 & & & & & & & & v & & & \\
 & & v & & t^* & & & & & & &
\end{array}
$$

vastuolu

valem on tautoloogia

III osa. Predikaatloogika

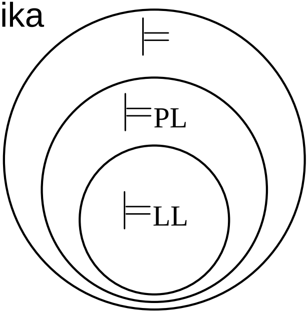
- Indiviidid ja predikaadid
- Kvantorid
- Loogiline ruut
- Süllogismid
- Venni diagrammid

8. Indiviidid ja predikaadid

- Loogikate skeem
- Euleri ringid
- Lauseloogika piiratus
- Predikaadid
- Lausete formaliseerimine
- Interpretatsioon
- Kvantorite vajalikkus

Loogikate skeem

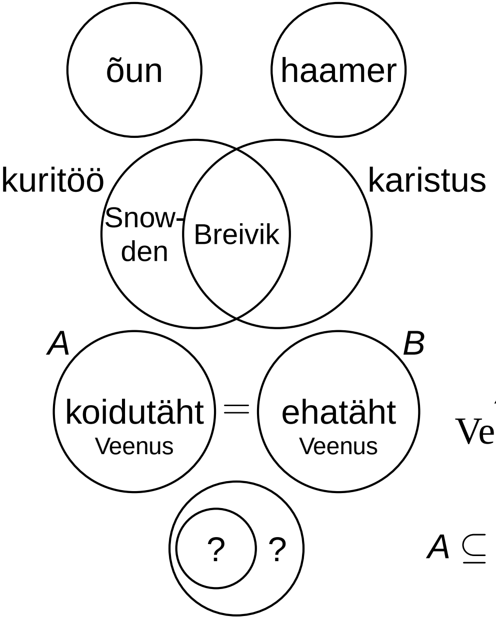
1. järku predikaatloogika
Tõesus:



Kõik linnud lendavad
Part on lind

Part lendab

Euleri ringid ja mõisted



$A = B$

$\text{Veenus} \in A$

$A \subseteq B$

Kehtimatus lauseloogikas

A	Kõik linnud lendavad.
B	Part on lind.
C	Part lendab.

$$A, B \not\models_{\mathrm{LL}} C$$

Definitsioon.

$\Gamma \models_{\mathrm{LL}} p \iff$ igal lausemuutujate väärtustusel, kui $\Gamma = t$, siis $p = t$.

Kontranäide: $A = B = t$, $C = v$

Predikaadid

Gottlob Frege: Predikaat on auklik lause:

- 1-kohaline

  Part on lind

  – on lind

  x on lind
- 2-kohaline

  Tõnu elab Tartus

  – elab –

  x elab y-is
- ...

Signatuur

Tähestik:

- indiviidmuutujad: $x, y, z, \ldots$
- indiviidkonstandid: $a, b, c, \ldots, a_1, \ldots$
- predikaatkonstandid: $P, Q, R, \ldots$

Signatuuri moodustavad valemites kasutatavad indiviid- ja predikaatkonstandid (vastavate aarsustega).

Näide.

$\sigma = \langle A, B; a \rangle$

Ax – "x on lind"

Bx – "x lendab"

a – part

Aa – "part on lind"

Ba – ...

Kehtimatus kvantoriteta predikaatloogikas

Ax – “x on lind”

Bx – “x lendab”

a – part

c – kõik linnud

Bc	Kõik linnud lendavad.
Aa	Part on lind.
Ba	Part lendab.

$$Bc, Aa \not\models_{\mathrm{PL}} Ba$$

Definitsioon.

$\Gamma \models_{\mathrm{PL}} p \iff$ igas interpretatsioonis I,
kui $I \models \Gamma$, siis $I \models p$.
(kui Γ valemid on I-s tõesed, siis p on I-s tõene)

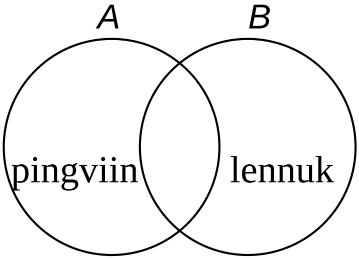
Kontranäide: $I \models Bc$, $I \models Aa$, $I \not\models Ba$ (hiljem)

Ümberlükkav interpretatsioon

$U_I = \{\text{pingviin}, \text{lennuk}\}$
$A_I = \{\text{pingviin}\}$
$a_I = \text{pingviin}$
$c_I = \text{lennuk}$
$B_I = \{\text{lennuk}\}$

$I \models Bc$
$I \models Aa$
$I \not\models Ba$

$Bc, Aa \not\models_{\text{PL}} Ba$

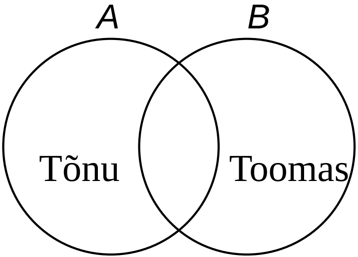


Alternatiivne interpretatsioon

$$U_J = \{\text{Tõnu}, \text{Toomas}\}$$
$$A_J = \{\text{Tõnu}\}$$
$$a_J = \text{Tõnu}$$
$$c_J = \text{Toomas}$$
$$B_J = \{\text{Toomas}\}$$

$$J \models Bc$$
$$J \models Aa$$
$$J \not\models Ba$$

$$Bc, Aa \not\models_{\text{PL}} Ba$$



Interpretatsioon

Signatuuri σ interpretatsioon I koosneb arutluse universumist U_I ja kõigi signatuuri elementide interpretatsioonidest:

- U_I on mittetühi hulk
- igale indiviidkonstandile $c \in \sigma$ seatakse vastavusse üheselt määratud element $c_I \in U_I$
- igale 1-kohalisele predikaatkonstandile $P \in \sigma$ seatakse vastavusse alamhulk $P_I \subseteq U_I$ (ekstensioon e. tõesuspiirkond)
- igale 2- kohalisele predikaatkonstandile $P \in \sigma$ seatakse vastavusse alamhulk $P_I \subseteq U_I \times U_I$ (seosed)
- ...

Semantika

- 1-kohaline predikaat: $I \models Pt \iff t_I \in P_I$
  (t on indiviidkonstant või universumi objekt:
  $t_I = t$, kui $t \in U_I$)
- 2-kohaline predikaat: $I \models Pab \iff (a_I, b_I) \in P_I$

Näide.

$\sigma = \langle A, B; a, c \rangle$
$U_I = \{\text{part}, \text{linnud}\}$
$A_I = \{\text{part}\}$
$a_I = \text{part}$
...

$I \models Aa$, *sest* $a_I \in A_I$

9. Kvantorid

- Lausete formaliseerimine
- Kehtivuse tõestus

Kvantorid

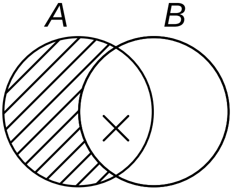
Toome sisse kvantorid:

- $\forall x$ – tõene universumi kõigi objektide korral
  üldisuskvantor (tagurpidi A)
- $\exists x$ – tõene universumi mõne objekti korral
  eksistentsikvantor (olemasolukvantor)
  (pööratud E)

Kehtivuse tõestus

Kõik linnud lendavad. Part on lind. $\models$ Part lendab.
Ax – "x on lind", Bx – "x lendab", a – part

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x\,(Ax \supset Bx)\\ Aa\end{array}}{Ba?}$$

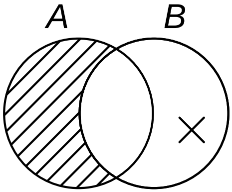


Ei leidu lindu, kes ei lenda.

Ümberlükkamine

Kõik linnud lendavad. Part lendab. $\not\models$ Part on lind.
Ax – "x on lind", Bx – "x lendab", a – part

$$\begin{array}{l} \forall x\,(Ax \supset Bx) \\ Ba \\ \hline Aa? \end{array}$$



Tõetingimused

- $I \models \forall x\, p \iff$ iga $c \in U_I$ korral $I \models p\{x/c\}$ (kõik indiviidmuutuja x esinemised on asendatud universumi objektiga c)
- $I \models \exists x\, p \iff$ leidub $c \in U_I$, nii et $I \models p\{x/c\}$
- lauseloogikast kanduvad üle lausemuutujate väärtustused (t/v) ja lauseloogika tehted

Loomulik intepretatsioon

Peame silmas arutluse sõnastamisel.

Näide.

$U_I = \{\mathrm{part}, \mathrm{lind}, \mathrm{hiir}\}$

$a_I = \mathrm{part}$

$A_I = \{\mathrm{part}, \mathrm{lind}\}$

$B_I = \{\mathrm{part}, \mathrm{lind}\}$

$I \models Aa$, *sest* $a_I \in A_I$, *s.t.* $part \in A_I$

$I \models Ba$, *sest* $a_I \in B_I$, *s.t.* $part \in B_I$

$I \models \forall x\,(Ax \supset Bx)$, *sest* $A_I \subseteq B_I$, *s.t.*

$$I \models Apart \supset Bpart = t \supset t = t$$

$$I \models Alind \supset Blind = t \supset t = t$$

$$I \models Ahiir \supset Bhiir = v \supset v = t$$

Kategooriliste lausete formaliseerimine

$U_I = \{\text{part}, \text{lind}, \text{hiir}\}$	$U_J = \{\text{kiivi}\}$	$U_K = \{\text{nahkhiir}\}$
$A_I = \{\text{part}, \text{lind}\}$	$A_J = \{\text{kiivi}\}$	$A_K = \{\}$
$B_I = \{\text{part}, \text{lind}\}$	$B_J = \{\}$	$B_K = \{\text{nahkhiir}\}$

	I	J	K
$\forall x\,(Ax \supset Bx)$	t		
$\forall x\,(Ax \,\&\, Bx)$	v		
Kõik linnud lendavad	t		
$\exists x\,(Ax \supset Bx)$	t	v	t
$\exists x\,(Ax \,\&\, Bx)$	t	v	v
Mõni lind lendab	t	v	v

Standardesitused

Teoreem.

1) Valem $\forall x\,(Ax \supset Bx)$ formaliseerib lauset "Kõik linnud lendavad" paremini kui $\forall x\,(Ax \,\&\, Bx)$, sest võtab arvesse juhu, kus universumis on objekte, mis pole linnud.
2) Valem $\exists x\,(Ax \,\&\, Bx)$ formaliseerib lauset "Mõni lind lendab" paremini kui $\exists x\,(Ax \supset Bx)$, sest nõuab vähemalt ühe linnu leidumist interpretatsioonis.

Järeldus.

1) Valem $\forall x\,(Ax \supset \neg Bx)$ formaliseerib lauset "Ükski lind ei lenda".
2) Valem $\exists x\,(Ax \,\&\, \neg Bx)$ formaliseerib lauset "Mõni lind ei lenda".

Kategoorilised laused

lauseliik	tähis	lause	valem
üldjaatav	A	iga *S* on *P*	$\forall x\,(Sx \supset Px)$
üldeitav	E	ükski *S* pole *P*	$\forall x\,(Sx \supset \neg Px)$
osajaatav	I	mõni *S* on *P*	$\exists x\,(Sx \mathbin{\&} Px)$
osaeitav	O	mõni *S* pole *P*	$\exists x\,(Sx \mathbin{\&} \neg Px)$

Näide.

1. Kõik linnud lendavad
   $\forall x\,(Ax \supset Bx)$
2. Mõni lind lendab
   $\exists x\,(Ax \mathbin{\&} Bx)$

Abstraktne intepretatsioon

Definitsioon.

Arutlus kehtib, kui igas interpretatsioonis, milles selle eeldused on tõesed, on ka järeldus tõene.

$\forall x\,(Ax \supset Bx)$	*Kõik linnud lendavad.*
Aa	*Part on lind.*
Ba	*Part lendab.*

Valime interpretatsiooni T nii, et see hõlmab kõiki interpretatsioone, milles arutluse eeldused on tõesed. Näitame, et siis on tõene ka järeldus.

Kehtivuse tõestus

$$T \models \forall x\,(Ax \supset Bx)$$
$$T \models Aa$$
$$T \models Ba\ ?$$

1. Olgu T suvaline interpretatsioon, milles arutluse eeldused $\forall x\,(Ax \supset Bx)$ ja Aa on tõesed.
2. Kuna Aa on interpretatsioonis T tõene, leidub selle universumis objekt b, mis interpreteerib indiviidkonstanti a ning mis kuulub predikaadi A ekstensiooni. $(b \in U_T,\ a_T = b$ ja $b \in A_T)$
3. Kuna $\forall x\,(Ax \supset Bx)$ on interpretatsioonis T tõene, on selles tõene ka $Ab \supset Bb$.
4. Kuna $Ab \supset Bb$ ja Ab on interpretatsioonis T tõesed, on selles tõene Bb, seega ka Ba. $(a_T = b \in B_T)$

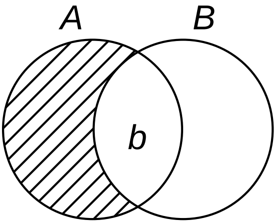
Kehtivuse tõestus (järg)

$$T \models \forall x\,(Ax \supset Bx)$$
$$T \models Aa$$
$$T \models Ba\ ?$$

Saime abstraktse interpretatsiooni

$$U_T = \{b, \ldots\}$$
$$a_T = b$$
$$A_T = \{b, \ldots\}$$
$$B_T = \{b, \ldots\}$$

Vastav Venni diagramm:



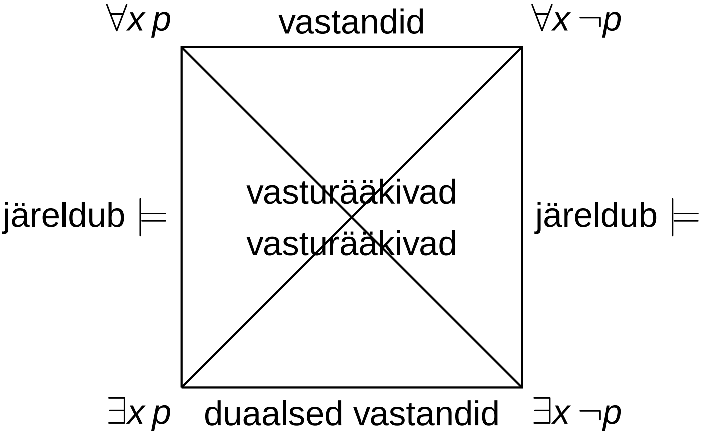
$A \subseteq B$

10. Loogiline ruut

- Valemite vahelised seosed
- Seadused

Loogiline ruut

Loogiline ruut (vastandite ruut, *square of opposition*) oli tuntud 2000 a. tagasi — Aristoteles.



Seosed

- Valemid A ja B on vasturääkivad (kontradiktsioonid), kui $A = \neg B$.
- Valemid A ja B on vastandid (kontraarsed), kui nad ei saa olla korraga tõesed, s.t. $A \models \neg B$ ja $B \models \neg A$.
- Valemid A ja B on duaalsed vastandid (subkontraarsed), kui nad ei saa olla korraga väärad, s.t. $\neg A \models B$ ja $\neg B \models A$.
- Valemist A järeldub valem B ($A \models B$), kui igas interpretatsioonis, kus A on tõene, on ka B tõene.

Seadused

- $\forall x\, p = \neg\exists x\, \neg p$ (vasturääkivad: laskuv diagonaal)
- $\neg\forall x\, p = \exists x\, \neg p$
- $\exists x\, p = \neg\forall x\, \neg p$ (vasturääkivad: tõusev diagonaal)
- $\neg\exists x\, p = \forall x\, \neg p$
- $\forall x\, p \models \neg\forall x\, \neg p$ (vastandid)
- $\forall x\, \neg p \models \neg\forall x\, p$
- $\forall x\, p \models \exists x\, p$ (järeldumine)
- $\forall x\, \neg p \models \exists x\, \neg p$
- $\neg\exists x\, p \models \exists x\, \neg p$ (duaalsed vastandid)
- $\neg\exists x\, \neg p \models \exists x\, p$

Vasturääkivad

Teoreem.

$\forall x\, p = \neg \exists x \neg p$.

Tõestus.

Valime interpretatsiooni I, nii et $I \models \forall x\, p$.

Siis

$$
\begin{aligned}
& I \models \forall x\, p \\
& \quad \iff \quad \text{iga } c \in U_I \text{ korral } I \models p\{x/c\} \\
& \quad \iff \quad \text{iga } c \in U_I \text{ korral } I \not\models \neg p\{x/c\} \\
& \quad \iff \quad I \not\models \exists x \neg p \\
& \quad \iff \quad I \models \neg \exists x \neg p
\end{aligned}
$$

$\square$

Vastandid

Teoreem.

$\forall x\, p \models \neg\forall x\, \neg p$.

Tõestus.

Valime interpretatsiooni I, nii et $I \models \forall x\, p$.
Siis

$$
\begin{aligned}
& I \models \forall x\, p \\
& \qquad \Longrightarrow \quad \text{iga } c \in U_I \text{ korral } I \models p\{x/c\} \\
& \qquad \Longrightarrow \quad \text{iga } c \in U_I \text{ korral } I \not\models \neg p\{x/c\} \\
& \qquad \Longrightarrow \quad I \not\models \forall x\, \neg p \text{ (sest } U_I \neq \emptyset) \\
& \qquad \Longrightarrow \quad I \models \neg\forall x\, \neg p
\end{aligned}
$$

$\square$

Järeldumine

Teoreem.

$\forall x\, p \models \exists x\, p$.

Tõestus.

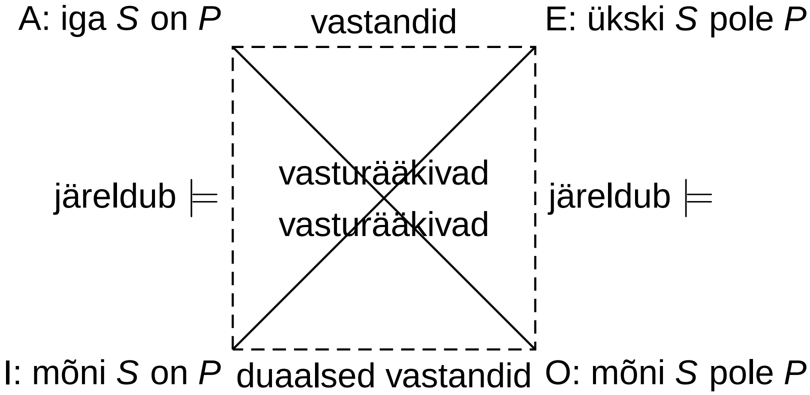
Valime interpretatsiooni I, nii et $I \models \forall x\, p$.

Siis

$$
\begin{aligned}
I \models \forall x\, p & \\
\Longrightarrow \quad & \text{iga } c \in U_I \text{ korral } I \models p\{x/c\} \\
\Longrightarrow \quad & \text{leidub } c \in U_I \text{, nii et } I \models p\{x/c\} \\
& (\text{sest } U_I \neq \emptyset) \\
\Longrightarrow \quad & I \models \exists x\, p
\end{aligned}
$$

$\square$

Kategooriliste lausete ruut



Tänapäeval ei kehti, sest eeldab subjekti ekstensiooni mittetühjust! (existential import)

Kontranäited: $S_I = \emptyset$

$\forall x\,(Sx \supset Px) = t$ vastandid $\forall x\,(Sx \supset \neg Px) = t$

järeldub $\models$ vasturääkivad vasturääkivad järeldub $\models$

$\exists x\,(Sx \,\&\, Px) = v$ duaalsed vastandid $\exists x\,(Sx \,\&\, \neg Px) = v$

Teoreem.

Kategooriliste lausete ruudus ei kehti katkendjoontega väited.

Kuid diagonaalide vasturääkivus säilib.

Kategooriliste lausete seadused

- $\forall x\,(Sx \supset Px) = \neg\exists x\,(Sx \mathbin{\&} \neg Px)$ (laskuv diag.)
- $\neg\forall x\,(Sx \supset Px) = \exists x\,(Sx \mathbin{\&} \neg Px)$
- $\exists x\,(Sx \mathbin{\&} Px) = \neg\forall x\,(Sx \supset \neg Px)$ (tõusev diag.)
- $\neg\exists x\,(Sx \mathbin{\&} Px) = \forall x\,(Sx \supset \neg Px)$
- $\forall x\,(Sx \supset Px) \not\models \neg\forall x\,(Sx \supset \neg Px)$ (vastandid)
- $\forall x\,(Sx \supset \neg Px) \not\models \neg\forall x\,(Sx \supset Px)$
- $\forall x\,(Sx \supset Px) \not\models \exists x\,(Sx \mathbin{\&} Px)$ (järeldumine)
- $\forall x\,(Sx \supset \neg Px) \not\models \exists x\,(Sx \mathbin{\&} \neg Px)$
- $\neg\exists x\,(Sx \mathbin{\&} Px) \not\models \exists x\,(Sx \mathbin{\&} \neg Px)$ (duaalsed vast.)
- $\neg\exists x\,(Sx \mathbin{\&} \neg Px) \not\models \exists x\,(Sx \mathbin{\&} Px)$

Diagonaalide vasturääkivus

Teoreem.
$\forall x\,(Sx \supset Px) = \neg\exists x\,(Sx \mathbin{\&} \neg Px)$.

Tõestus.

$$\begin{aligned}\forall x\,(Sx \supset Px) &= \neg\exists x\,\neg(Sx \supset Px) = \\ &= \neg\exists x\,(Sx \mathbin{\&} \neg Px)\end{aligned}$$

$\square$

11. Süllogismid

- Figuurid
- Kehtivad süllogismid
- Taandamismeetod
- Baasmoodused
- Laienemismeetod

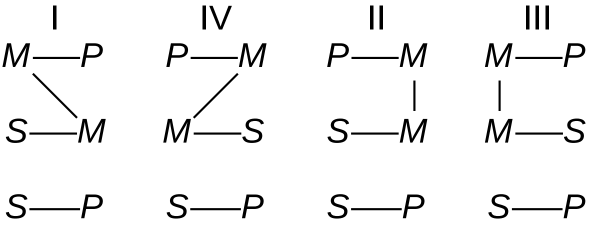
Süllogismid

Vaatleme kolmest kategoorilisest lausest moodustatud arutlust.

Kõik kassid on hallid.	MaP
Mõni koduloom on kass.	SiM
Mõni koduloom on hall.	SiP

- Kategooriliste lausete liigid määravad süllogismi mooduse.
- Süllogismis peab olema keskmine termin M, mis esineb mõlemas eelduses.
- Esimeses ehk põhieelduses on järelduse predikaadi termin P.
- Teises ehk alameelduses on järelduse subjekti termin S.
- Süllogismi figuuri määrab keskmisi termineid siduva joone positsioon.

Neli figuuri



I figuuris kehtivad järgmised süllogismid:

Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Barbari^e, Celaront^e

II figuuris: Cesare, Camestres, Festino, Baroco, Cesaro^e, Camestrop^e

III figuuris: Darapti^e, Disamis, Datisi, Felapton^e, Bocardo, Ferison

IV figuuris: Bramantip^e, Camenes, Dimaris, Fesapo^e, Fresison, Camenop^e

Kokku on 256 süllogismi moodust. (4 figuuri, igas 3 rida)

Neist kehtisid $15 + 9^e = 24$ moodust (*e* – existential import)

Kehtiv süllogism

Kõik kassid on hallid.	MaP
Mõni koduloom on kass.	SiM
Mõni koduloom on hall.	SiP

I figuur: Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Barbari^e, Celaront^e
Kuna süllogism on I figuuris ja vokaalide järjestus vastab Darii-le, siis see süllogism kehtib.

Mittekehtiv süllogism

Kõik pardid lendavad.	PaM
Kõik haned lendavad.	SaM
Kõik haned on pardid.	SaP

II figuur: Cesare, Camestres, Festino, Baroco, Cesaro^{e}, Camestrop^{e}

Süllogism ei kehti, sest see on II figuuris, kuid vokaalide järjestus puudub kehtivate süllogismide nimistus.

Tõestusmeetodid

- Aristotelese taandamismeetod
- Luuletus . . .
- Laienemismeetod
- Venni diagrammid
- Monaadilise predikaatloogika tõestused . . .

Aristotelese taandamismeetod

- Aristoteles tõestas nelja baasmooduse kehtivuse üldprintsiibi alusel (dictum de omni et nulla)
- Ülejäänud mooduste kehtivuse taandas ta neile neljale:

Tähis	Selgitus	Sisu
s	lihtne vahetus (simple)	SiP $=$ PiS
		SeP $=$ PeS
p	eelduste tugevdamine /	SaP $\models$ SiP
	järelduse nõrgendamine	SeP $\models$ SoP
m	eelduste vahetus	$p,q \models r \implies q,p \models r$
c	vastuväiteline taandamine	$p,q \models r \implies p,\neg r \models \neg q$
	(per impossible)	SeP $=$ $\neg$SiP, SaP $=$ $\neg$SoP

Taandamise näide

II figuuri Festino taandub I figuuri Ferio'le

$$\frac{\begin{array}{c}\text{PeM}\\ \text{SiM}\end{array}}{\text{SoP}} \stackrel{S}{\Longrightarrow} \frac{\begin{array}{c}\text{MeP}\\ \text{SiM}\end{array}}{\text{SoP}}$$

I: Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Barbari^{e}, Celaront^{e}
II: Cesare, Camestres, Festino, Baroco, Cesaro^{e}, Camestrop^{e}

Taandamise näide 2

II figuuri Baroco taandub I figuuri Barbara'le

$$\frac{\begin{array}{c}\text{PaM}\\ \text{SoM}\end{array}}{\text{SoP}} \overset{c}{\Longrightarrow} \frac{\begin{array}{c}\text{PaM}\\ \text{SaP}\end{array}}{\text{SaM}} = \frac{\begin{array}{c}\text{MaP}\\ \text{SaM}\end{array}}{\text{SaP}}$$

I: Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Barbari^{e}, Celaront^{e}
II: Cesare, Camestres, Festino, Baroco, Cesaro^{e}, Camestrop^{e}

Pikk taandamine

II figuuri Camestres taandub I figuuri Celarent'ile

$$\frac{\begin{matrix}\text{PaM}\\ \text{SeM}\end{matrix}}{\text{SeP}} \overset{\text{m}}{\Longrightarrow} \frac{\begin{matrix}\text{SeM}\\ \text{PaM}\end{matrix}}{\text{SeP}} \overset{\text{s}}{\Longrightarrow} \frac{\begin{matrix}\text{MeS}\\ \text{PaM}\end{matrix}}{\text{SeP}} \overset{\text{s}}{\Longrightarrow} \frac{\begin{matrix}\text{MeS}\\ \text{PaM}\end{matrix}}{\text{PeS}} = \frac{\begin{matrix}\text{MeP}\\ \text{SaM}\end{matrix}}{\text{SeP}}$$

I: Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Barbari^{e}, Celaront^{e}
II: Cesare, Camestres, Festino, Baroco, Cesaro^{e}, Camestrop^{e}

Baasmoodused

- Mis käib terviku kohta, käib ka selle osa kohta.
- Mis ei käi osa kohta, see ei käi terviku kohta.

I: Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Barbari^e, Celaront^e

Näide.

I Darii kehtib.

$$\frac{\begin{array}{c} M \subseteq P \\ S \in M \end{array}}{S \in P}$$

Kõik linnud lendavad. Part on lind. $\models$ Part lendab.
Kõik kassid on hallid. Mõni koduloom on kass. $\models$
Mõni koduloom on hall.

Laienemismeetod

Definitsioon.

Termin on lauses laienev, kui sellest järeldub lause, milles termin on asendatud konkreetse objektiga.

Näide.

Kõik kassid on hallid. $\models$ See kass on hall. $(= t)$
Kõik kassid on hallid. $\not\models$ Kõik kassid on see hall (asi). $(= v)$

$S^t a P^v$
$S^t e P^t$
$S^v i P^v$
$S^v o P^t$

Kriteerium

Süllogism kehtib, kui see rahuldab kolme nõuet:

1. Iga termin, mis laieneb järelduses, laieneb ka eelduses.
2. Keskmine termin laieneb vähemalt korra.
3. Eitavate järelduste arv on võrdne eitavate eelduste arvuga.

Näide

I: Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Barbari^e, Celaront^e

$$\frac{\begin{array}{c} M^t a P^v \\ S^v i M^v \end{array}}{S^v i P^v}$$

Kõik kassid on hallid. Mõni koduloom on kass. $\models$
Mõni koduloom on hall.
Kõik linnud lendavad. Part on lind. $\models$ Part lendab.

Näide 2

II: Cesare, Camestres, Festino, Baroco, Cesaro^e, Camestrop^e

$$\frac{\begin{array}{c} P^t a M^v \\ S^t e M^t \end{array}}{S^t e P^t}$$

Näide 3

II: Cesare, Camestres, Festino, Baroco, Cesaro^e, Camestrop^e

$$\frac{\begin{array}{c} P^t a M^v \\ S^t a M^v \end{array}}{S^t a P^v}$$

Kõik pardid lendavad. Kõik haned lendavad.
$\not\models$ Kõik haned on pardid.

12. Venni diagrammid

- Koostamine
- Viirutamine
- Tõestamine
- Ümberlükkamine

Venni diagrammid

Definitsioon.

N omaduse Venni diagramm koosneb N tasapinnalisest kujundist, nii et iga järgnev kujund jagab kõik eelnevad joontega piiratud alad pooleks.

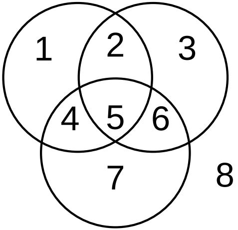
N omaduse Venni diagramm koosneb 2^N alast.

Näide.

N=1: ring

N=2: kaks ringi

N=3: kolm ringi



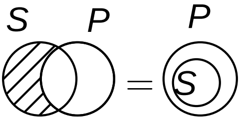
Venni diagrammi tehted

- viirutamine (tühi ala, s.t. seal pole ühtegi objekti)
- rist või indiviidkonstant (ala, kus kindlasti on mingi objekt — kategoorilistes süllogismides piisab ristidest), võib kanda ka joonte peale, kui objekt võib olla emmas või kummas alas

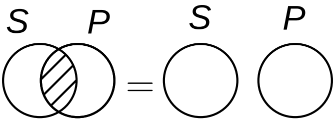
Eelduste põhjal saame nende võimaliku abstraktse mudeli. Küsimus: kas järeldus on eelduste mudelis paratamatult tõene?

Kategoorilised laused

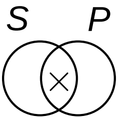
- Iga *S* on *P* (üldjaatav)



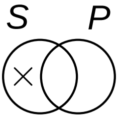
- Ükski *S* pole *P* (üldeitav)



- Mõni *S* on *P* (osajaatav)



- Mõni *S* pole *P* (osaeitav)

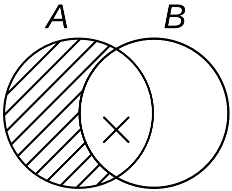


Kehtivuse tõestus

Kõik linnud lendavad. Part on lind. $\models$ Part lendab.

Ax – "x on lind", Bx – "x lendab", a – part

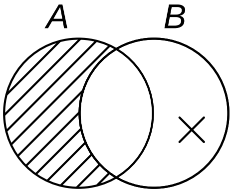
$$\begin{array}{l} \forall x\,(Ax \supset Bx) \\ Aa \\ \hline Ba? \end{array}$$



Ümberlükkamine

Kõik linnud lendavad. Part lendab. $\not\models$ Part on lind.
Ax – "x on lind", Bx – "x lendab", a – part

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x\,(Ax \supset Bx)\\ Ba\end{array}}{Aa?}$$



Näide

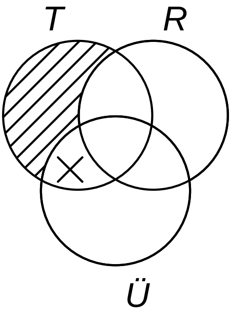
Kõik kassid on hallid.
Mõni koduloom on kass.
Järelikult mõni koduloom on hall.

Näide

Kõik pardid lendavad.
Kõik haned lendavad.
Järelikult kõik haned on pardid.

Ülesanne

Igaüks, kes elab Tammelinnas, on rikas või üksildane.
Mitte kõik Tammelinna elanikud ei ole rikkad.
Järelikult . . .



. . . mõni Tammelinna elanik on üksildane.

Ülesanne

Kõik tüdrukud söövad kohupiimakooki.

Mõni tüdruk on maias.

Järelikult . . .